Module Files d'attente et trafic

L. Decreusefond

2011-2012

Loi exponentielle

$U \sim \varepsilon(\lambda)$, $V \sim \varepsilon(\mu)$, U et V indépendantes

- $\mathbf{P}\left(U \leq V\right) = \lambda/(\lambda+\mu)$;
- $U \wedge V \sim \varepsilon(\lambda+\mu)$.
- Soit $G \sim Geom(\rho)$ et $(X_n,\ n \geq 1)$ des variables aléatoires indépendantes. Pour tout n, $X_n \sim \varepsilon(\lambda)$. Soit $Z = \sum_{j=1}^{G} X_j$. La loi de Z est une loi exponentielle de paramètre $\lambda\rho$.
- $\mathbf{P}\left(U \geq t+s \,|\, U > t\right) = \mathbf{P}\left(U > s\right)$

Loi exponentielle

$U \sim \varepsilon(\lambda)$, $V \sim \varepsilon(\mu)$, U et V indépendantes

- $\mathbf{P}\left(U \leq V\right) = \lambda/(\lambda + \mu)$;
- $U \wedge V \sim \varepsilon(\lambda + \mu)$.
- Soit $G \sim Geom(\rho)$ et $(X_n,\ n \geq 1)$ des variables aléatoires indépendantes. Pour tout n, $X_n \sim \varepsilon(\lambda)$. Soit $Z = \sum_{j=1}^{G} X_j$. La loi de Z est une loi exponentielle de paramètre $\lambda\rho$.
- $\mathbf{P}\left(U \geq t + s \,|\, U > t\right) = \mathbf{P}\left(U > s\right)$

Loi exponentielle

$U \sim \varepsilon(\lambda)$, $V \sim \varepsilon(\mu)$, U et V indépendantes

- $\mathbf{P}\left(U \leq V\right) = \lambda/(\lambda+\mu)$;
- $U \wedge V \sim \varepsilon(\lambda+\mu)$.
- Soit $G \sim Geom(\rho)$ et $(X_n,\ n \geq 1)$ des variables aléatoires indépendantes. Pour tout n, $X_n \sim \varepsilon(\lambda)$. Soit $Z = \sum_{j=1}^{G} X_j$. La loi de Z est une loi exponentielle de paramètre $\lambda\rho$.
- $\mathbf{P}\left(U \geq t+s \,|\, U > t\right) = \mathbf{P}\left(U > s\right)$

Loi exponentielle

$U \sim \varepsilon(\lambda)$, $V \sim \varepsilon(\mu)$, U et V indépendantes

- $\mathbf{P}\left(U \leq V\right) = \lambda/(\lambda+\mu)$;
- $U \wedge V \sim \varepsilon(\lambda+\mu)$.
- Soit $G \sim Geom(\rho)$ et $(X_n,\ n \geq 1)$ des variables aléatoires indépendantes. Pour tout n, $X_n \sim \varepsilon(\lambda)$. Soit $Z = \sum_{j=1}^{G} X_j$. La loi de Z est une loi exponentielle de paramètre $\lambda\rho$.
- $\mathbf{P}\left(U \geq t+s \,|\, U > t\right) = \mathbf{P}\left(U > s\right)$

Loi exponentielle

M/M/1

$U \sim \varepsilon(\lambda)$, $V \sim \varepsilon(\mu)$, U et V indépendantes

- $\mathbf{P}\left(U \le V\right) = \lambda/(\lambda+\mu)$;
- $U \wedge V \sim \varepsilon(\lambda+\mu)$.
- Soit $G \sim Geom(\rho)$ et $(X_n,\, n \ge 1)$ des variables aléatoires indépendantes. Pour tout n, $X_n \sim \varepsilon(\lambda)$. Soit $Z = \sum_{j=1}^{G} X_j$. La loi de Z est une loi exponentielle de paramètre $\lambda\rho$.
- $\mathbf{P}\left(U \ge t+s \,|\, U > t\right) = \mathbf{P}\left(U > s\right)$

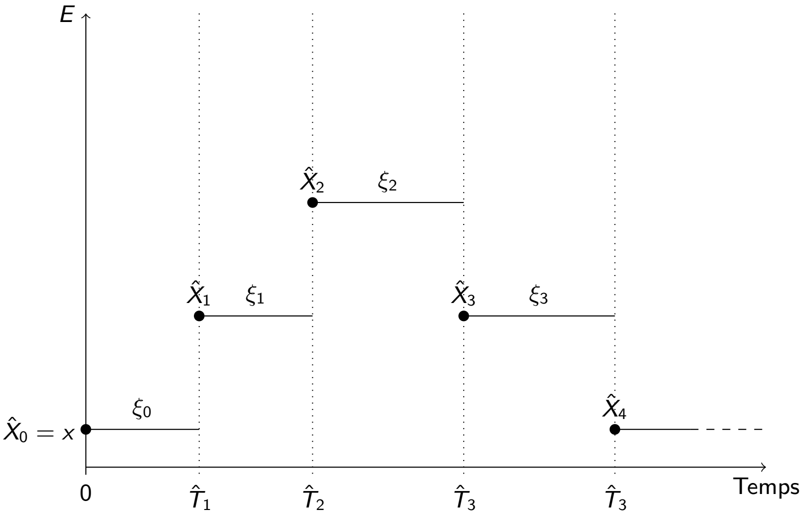
Construction trajectorielle de processus de Markov

- E espace d'états au plus dénombrable
- ν probabilité sur E
- $(q(x, y), x \in E, y \in E \setminus \{x\})$ matrice de transition
- $q(x, x) \geq 0$

- $X(0)$ est une v.a. de loi ν ;
- si $X(0) = x$, $\xi_1 = T_1 \sim \varepsilon(q(x, x))$ indépendante de $X(0)$;
- $X(t) = x$ pour $t < T_1$
- $\hat{X}_1$ v.a. indépendante de $(X(0),\ T_1)$ telle que :

$$\mathbf{P}(\hat{X}_1 = y) = q(x, y);$$

- soit x_1 la valeur de $\hat{X}_1$
- $\xi_2 \sim \varepsilon(q(x_1, x_1))$ indépendante de $(X(0), \xi_1, \hat{X}_1)$.
- $X(t) = \hat{X}_1$ pour $T_1 \leq t < T_2$;



E
$\hat{X}_0 = x$
ξ_0
$\hat{X}_1$
ξ_1
$\hat{X}_2$
ξ_2
$\hat{X}_3$
ξ_3
$\hat{X}_4$
0
$\hat{T}_1$
$\hat{T}_2$
$\hat{T}_3$
$\hat{T}_3$
Temps

Chaîne incluse

- la suite $(\hat{X}_n, , n \geq 0)$ est une chaîne de Markov de matrice de transition $\hat{Q}$ définie par :

$$\hat{Q}(x, y) = \begin{cases} q(x, y) & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y. \end{cases}$$

- Cette chaîne de Markov s'appelle la chaîne incluse.
- Remarque : il ne peut pas y avoir de transition d'un état vers lui-même puisque l'on observe les positions de X seulement lors de ses changements d'état.

File M/M/1

- Arrivées = P.P.(λ)
- Temps de service = $\varepsilon(\mu)$
- 1 serveur, buffer de taille infinie
- $X(t)$ = nombre de clients dans le système à l'instant t

Dynamique de la file

- Si $X(0) = 0$, prochain événement = arrivée
- $q(0,\ 1) = 1$
- Temps d'interarrivée = $\varepsilon(\lambda)$
- $q(0, 0) = \lambda$

- Si $X(0) = n > 0$
- Prochain événement = arrivée ou départ
- Prochaine arrivée a lieu dans un temps $\sim \varepsilon(\lambda) = \xi_A$
- Prochain départ a lieu dans un temps $\sim \varepsilon(\mu) = \xi_D$
- Prochain événement à $\min(\xi_A, \xi_D) \sim \varepsilon(\lambda + \mu)$
- $q(n, n) = \lambda + \mu$
- D'après les propriétés de la loi exponentielle expo

$$q(n,\ n+1) = \mathbf{P}(\xi_A < \xi_D) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$$

- De même,

$$q(n,\ n-1) = \mathbf{P}(\xi_A > \xi_D) = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$$

- Si $X(0) = n > 0$
- Prochain événement = arrivée ou départ
- Prochaine arrivée a lieu dans un temps $\sim \varepsilon(\lambda) = \xi_A$
- Prochain départ a lieu dans un temps $\sim \varepsilon(\mu) = \xi_D$
- Prochain événement à $\min(\xi_A, \xi_D) \sim \varepsilon(\lambda + \mu)$
- $q(n, n) = \lambda + \mu$
- D'après les propriétés de la loi exponentielle expo

$$q(n,\ n+1) = \mathbf{P}(\xi_A < \xi_D) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$$

- De même,

$$q(n,\ n-1) = \mathbf{P}(\xi_A > \xi_D) = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$$

- Si $X(0) = n > 0$
- Prochain événement $=$ arrivée ou départ
- Prochaine arrivée a lieu dans un temps $\sim \varepsilon(\lambda) = \xi_A$
- Prochain départ a lieu dans un temps $\sim \varepsilon(\mu) = \xi_D$
- Prochain événement à $\min(\xi_A, \xi_D) \sim \varepsilon(\lambda + \mu)$
- $q(n, n) = \lambda + \mu$
- D'après les propriétés de la loi exponentielle expo

$$q(n,\ n+1) = \mathbf{P}(\xi_A < \xi_D) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$$

- De même,

$$q(n,\ n-1) = \mathbf{P}(\xi_A > \xi_D) = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$$

- Si $X(0) = n > 0$
- Prochain événement = arrivée ou départ
- Prochaine arrivée a lieu dans un temps $\sim \varepsilon(\lambda) = \xi_A$
- Prochain départ a lieu dans un temps $\sim \varepsilon(\mu) = \xi_D$
- Prochain événement à $\min(\xi_A, \xi_D) \sim \varepsilon(\lambda + \mu)$
- $q(n, n) = \lambda + \mu$
- D'après les propriétés de la loi exponentielle expo

$$q(n,\ n+1) = \mathbf{P}(\xi_A < \xi_D) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$$

- De même,

$$q(n,\ n-1) = \mathbf{P}(\xi_A > \xi_D) = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$$

- Si $X(0) = n > 0$
- Prochain événement $=$ arrivée ou départ
- Prochaine arrivée a lieu dans un temps $\sim \varepsilon(\lambda) = \xi_A$
- Prochain départ a lieu dans un temps $\sim \varepsilon(\mu) = \xi_D$
- Prochain événement à $\min(\xi_A, \xi_D) \sim \varepsilon(\lambda + \mu)$
- $q(n, n) = \lambda + \mu$
- D'après les propriétés de la loi exponentielle expo

$$q(n,\ n+1) = \mathbf{P}(\xi_A < \xi_D) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$$

- De même,

$$q(n,\ n-1) = \mathbf{P}(\xi_A > \xi_D) = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$$

- Si $X(0) = n > 0$
- Prochain événement = arrivée ou départ
- Prochaine arrivée a lieu dans un temps $\sim \varepsilon(\lambda) = \xi_A$
- Prochain départ a lieu dans un temps $\sim \varepsilon(\mu) = \xi_D$
- Prochain événement à $\min(\xi_A, \xi_D) \sim \varepsilon(\lambda + \mu)$
- $q(n, n) = \lambda + \mu$
- D'après les propriétés de la loi exponentielle expo

$$q(n,\ n+1) = \mathbf{P}(\xi_A < \xi_D) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$$

- De même,

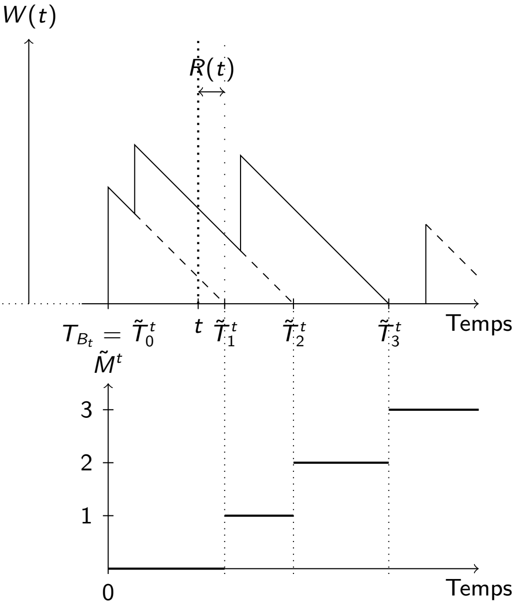
$$q(n,\ n-1) = \mathbf{P}(\xi_A > \xi_D) = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$$

- Si $X(0) = n > 0$
- Prochain événement = arrivée ou départ
- Prochaine arrivée a lieu dans un temps $\sim \varepsilon(\lambda) = \xi_A$
- Prochain départ a lieu dans un temps $\sim \varepsilon(\mu) = \xi_D$
- Prochain événement à $\min(\xi_A, \xi_D) \sim \varepsilon(\lambda + \mu)$
- $q(n, n) = \lambda + \mu$
- D'après les propriétés de la loi exponentielle expo

$$q(n,\ n+1) = \mathbf{P}(\xi_A < \xi_D) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$$

- De même,

$$q(n,\ n-1) = \mathbf{P}(\xi_A > \xi_D) = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$$



$W(t)$
$R(t)$
Temps
$T_{B_t} = \tilde{T}^t_0$
t
$\tilde{T}^t_1$
$\tilde{T}^t_2$
$\tilde{T}^t_3$
$\tilde{M}^t$
3
2
1
0
Temps

Conditionnellement à $\{X(t) > 0\}$, $R(t) \sim \varepsilon(\mu)$

Conditionnellement à $\{X(t) > 0\}$, $R(t) \sim \varepsilon(\mu)$

Conséquence

Les valeurs de $q(n, n+1)$ et $q(n, n-1)$ restent valables pour tous les sauts.

Exercice

- Calculer Q pour la file M/M/S
- Calculer Q pour la file M/M/S/S

Théorème

- Un processus (ν, Q) satisfait la propriété de Markov :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left[f(X(t+s))\,|\,X(u),\,u\leq t\right] &= \mathbf{E}\left[f(X(s+t))\,|\,X(t)=x\right]\\ &= \mathbf{E}\left[f(X(s))\,|\,X(0)=x\right]\end{aligned}$$

- T est un tda ssi $(T\leq t)\in\sigma\{X(u)\,u\leq t\}$
- Markov fort

$$\mathbf{E}\left[F\circ\Theta_T\,|\,\mathcal{F}_T\right]=\mathbf{E}\left[F\,|\,X(0)=X(T)\right]$$

Equation de Chapman-Kolmogorov

- Semi-groupe : $f \ : \ E \to \mathbf{R}$

$$P_t f(x) = \mathbf{E}\left[f(X(t) \,|\, X(0) = x\right]$$

- Equation de Chapman-Kolmogorov

$$\frac{d}{dt} P_t f(x) = A_Q P_t f(x) = P_t A_Q f(x)$$

où

$$A_Q f(x) = q(x,\, x) \sum_{y \neq x} (f(y) - f(x)) q(x,\, y).$$

- On pose

$$A(x, y) = (A_Q \, \mathbf{1}_y)(x) = \begin{cases} -q(x,\, x) & \text{si } x = y, \\ q(x,\, y) q(x,\, x) & \text{si } x \neq y. \end{cases}$$

- En termes matriciels, $P_t = e^{tA_Q}$

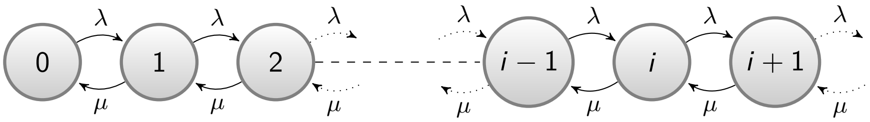
File M/M/1

$$\left\{\begin{array}{ll} A(i,\ i+1) & = \lambda, \\ A(i,\ i) & = -(\lambda + \mu\, \mathbf{1}_{[1,\,+\infty[}(i)), \\ A(i,\ i-1) & = \mu \text{ si } i > 0. \end{array}\right.$$

File M/M/1

$$\left\{\begin{array}{ll} A(i,\ i+1) & = \lambda, \\ A(i,\ i) & = -(\lambda + \mu\,\mathbf{1}_{[1,\,+\infty[}(i)), \\ A(i,\ i-1) & = \mu \text{ si } i > 0. \end{array}\right.$$

$$A = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & & & \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & (0) & \\ & & \ddots & & \\ & (0) & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$


0
1
2
$i-1$
i
$i+1$
λ
μ

Exercice

- Ecrire le générateur infinitésimal du modèle d'Engset
- Ecrire le générateur infintésimal de la file M/M/S/S+K

Théorème

X un processus de Markov régulier de paramètres (ν, Q). $\hat{X}$ la chaîne include. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- $\hat{X}$ est irréductible ;
- pour tout $x, y \in E$, il existe $t > 0$ tel que $p_t(x, y) > 0$;
- pour tout $x, y \in E$, pour tout $t > 0$, $p_t(x, y) > 0$.

Probabilité invariante

Théorème

Une mesure μ est invariante si et seulement si elle satisfait les équations :

$$\int Af \, \mathrm{d}\,\mu = 0, \text{ pour tout } f \in l^{\infty}(E). \tag{13}$$

En notation matricielle, cela revient à : $\mu A = 0$, où μ est le vecteur ligne $(\mu(x), x \in E)$.

Théorème

X un processus de Markov régulier irréductible récurrent. Il existe une unique mesure invariante à un facteur multiplicatif près. Cette mesure est proportionnelle à l'une des trois mesures suivantes :

(i) pour tout $y \in E$:

$$\mu(y) = \mathbf{E}_x \left[\int_0^{\tau_x^1} \mathbf{1}_{\{X(s)=y\}} \, \mathrm{d}\, s \right], \tag{14}$$

où $x \in E$ est quelconque mais fixé ;

(ii) pour tout $y \in E$, $\mu(y) = \hat{\mu}(y)/q(y, y)$ où $\hat{\mu}$ est une mesure invariante de la chaîne incluse $\hat{X}$;

(iii) μ, solution de l'équation matricielle $\mu A = 0$.

Théorème ergodique

Soit X un processus de Markov régulier irréductible récurrent. On note π l'unique probabilité invariante. Pour tout $f \in L^1(\pi)$, on a :

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(X(s))\,\mathrm{d}\,s = \sum_{x\in E} f(x)\pi(x).$$

Comportement asymptotique

Soit X un processus de Markov régulier irréductible. Si X est transient alors :

$$p_t(x, x) \underset{t \to \infty}{\longrightarrow} 0, \text{ pour tout } x \in E.$$

Si X est récurrent de probabilité invariante π :

$$p_t(x, y) \underset{t \to \infty}{\longrightarrow} \pi(y) \text{ et } \mathbf{E}_x \left[\tau_x^1\right] = \frac{1}{\pi(x)},$$

pour tout $x \in E$.

- Calculer la loi stationnaire de la file M/M/1
- Calculer la loi stationnaire de la file M/M/S/S