Module Files d'attente et trafic

L. Decreusefond

2011-2012

Bibliographie

collection méthodes stochastiques appliquées dirigée par Nikolaos Limnios et Jacques Janssen

D'Internet aux smartphones, des réseaux sociaux à la vidéo à la demande, les mathématiques sont présentes dans toutes les étapes de la conception et du déploiement des réseaux modernes de télécommunications.

Dans un environnement éminemment aléatoire, les protocoles doivent toujours être plus performants et adaptés aux contextes et services, les ressources doivent être allouées en nombre suffisant mais non disproportionné. *Modélisation et analyse stochastique des réseaux de télécommunications* étudie comment la théorie des files d'attente, la géométrie et l'analyse stochastique peuvent résoudre ces contraintes.

Dans un souci de rigueur mathématique et de clarté pédagogique, les outils probabilistes de bases (chaines et processus de Markov, suites récurrentes aléatoires, processus ponctuels réels et spatiaux) sont exposés de façon pertinente grâce à la théorie des martingales. Ils sont ensuite mis en œuvre pour obtenir un large éventail de résultats concrets applicables aux systèmes de communications.

Les auteurs

Laurent Decreusefond est professeur de mathématiques (probabilités et stochastique) à Telecom ParisTech. Ses recherches portent sur les processus fractionnaires et ponctuels, le calcul de Malliavin et leurs applications à l'évaluation de performance des réseaux.

Pascal Moyal est maître de conférences en mathématiques appliquées à l'université de Technologie de Compiègne. Ses recherches portent sur les processus stochastiques, la théorie ergodique, les files d'attente et les graphes aléatoires.

978-2-7462-2495-7

Hermes Science publications

www.hermes-science.com

Laurent Decreusefond
Pascal Moyal

Modélisation et analyse stochastiques des réseaux de télécommunications

collection méthodes stochastiques appliquées dirigée par Nikolaos Limnios et Jacques Janssen

Modélisation et analyse stochastiques des réseaux de télécommunications

Laurent Decreusefond
Pascal Moyal

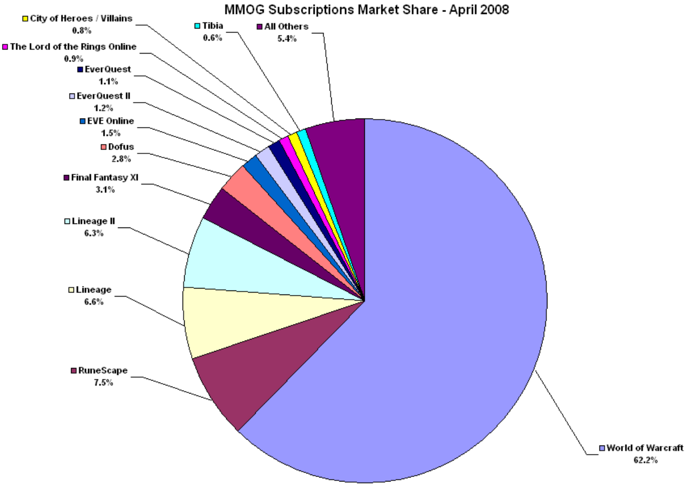
Hermes

Lavoisier

Au supermarché

Les téléphones mobiles

Les jeux temps-réel



Autres exemples

- Lignes de production
- Réparations de machines
- Internet
- etc.

Processus de Markov

- Outil mathématique $=$ processus de Markov
- processus de Markov$=$ chaînes de Markov $+$ processus de Poisson

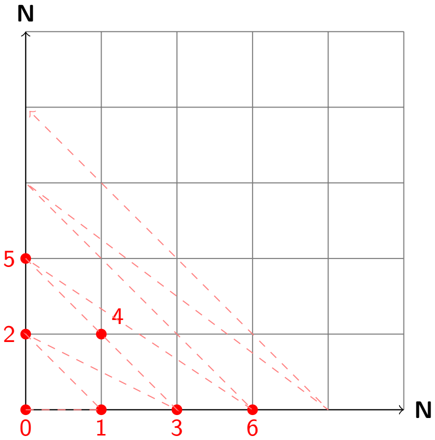
Chaînes de Markov

Ingrédients

- Espace d'états
- Probabilité initiale
- Opérateur (ou matrice) de transition

Espace d'états au plus dénombrable

- Au delà des espaces finis, les espaces dénombrables
- Un ensemble est dénombrable s'il est en bijection avec $\mathbf{N}$
- Exemple : $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $2\mathbf{N}$, etc.
- Plus surprenant, $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ est dénombrable



Conséquences

- Les produits cartésiens d'ensemble dénombrables sont dénombrables
- La bijection n'est pas forcément simple
- Exemple : l'ensemble des permutations de $\{1, \cdots, n\}$
- Pour les algorithmes, on supposera implicitement que l'on connaît une injection de E dénombrable dans $\mathbf{N}$
- Au plus dénombrable $=$ fini ou dénombrable ($=$discret)

Mesure de probabilité sur E discret

- Caractérisée par sa valeur sur les singletons : $\nu(\{x\})$ pour tout $x \in E$
- $\forall x \in E$, $\nu(x) \geq 0$ et $\sum_{x \in E} \nu(x) = 1$
- Soit $\phi\ :\ E \longrightarrow \mathbf{N}$

$$r_0 = \nu(\{\phi^{-1}(0)\}) \text{ et } r_n = \sum_{j=0}^{n} \nu(\{\phi^{-1}(j)\}) = \nu(\phi^{-1}(\{0, \cdots, n\})).$$

Algorithme 1. Réalisation d'une variable aléatoire de loi ν

Données : r_0, r_1, $\cdots$
Résultat : un élément de E choisi selon la loi ν
x← réalisation d'une loi uniforme sur [0, 1];
n← 0;
tant que $x > r_n$ **faire**
| $n \leftarrow n + 1$
fin
retourner $\phi^{-1}(n)$

Opérateur de transition

- $l^\infty(E) = \{f : E \to \mathbf{R},\ \sup_{x\in E} |f(x)| < \infty\}$
- P : opérateur de transition ssi
  1. P linéaire de $l^\infty(E)$ dans $l^\infty(E)$
  2. P positif : $f \geq 0 \Longrightarrow Pf \geq 0$
  3. P markovien : $P\,\mathbf{1} = \mathbf{1}$
- On pose $p(x,y) = P(\mathbf{1}_x)(y) \geq 0$, il vient

$$Pf(x) = \sum_{y\in E} p(x,y) f(y)$$

- Si $E \subset \mathbf{N}$ fini, P s'identifie à une matrice

Tribu engendrée

Définition

Soit $Z_1, \cdots, Z_n$ des variables aléatoires. Une v.a. Y appartient à $\sigma(Z_1, \cdots, Z_n)$ ssi il existe ϕ telle que

$$Y = \phi(Z_1, \cdots, Z_n).$$

On dit que $\sigma(Z_1, \cdots, Z_n)$ est la tribu engendrée par les v.a. $Z_1, \cdots, Z_n$.

Définition

La suite X est une chaîne de Markov lorsque pour tout $n \leq m$, la tribu $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \cdots, X_n)$ est indépendante de la tribu $\sigma(X_m)$ conditionnellement à $\sigma(X_n)$. En d'autres termes, pour toute fonction F et G bornées, on a :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left[F(X_0, \cdots, X_n)\, G(X_m) \,|\, X_n\right] \\ = \mathbf{E}\left[F(X_0, \cdots, X_n) \,|\, X_n\right]\ \mathbf{E}\left[G(X_m) \,|\, X_n\right].\end{aligned} \tag{1}$$

En particulier,

$$\mathbf{P}(X_{n+1} = j \,|\, X_0 = i_0, \cdots, X_n = i_n) = \mathbf{P}(X_{n+1} = j \,|\, X_n = i_n)$$

Homogénéité

Définition

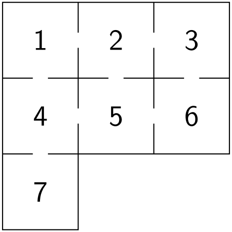
La chaîne de Markov X est dite homogène lorsque :

$$\mathbf{P}(X_{n+1} = y \,|\, X_n = x)$$

ne dépend pas de n mais seulement de x et y. On notera cette quantité $p(x, y)$ et on appelle

$$P = (\mathbf{P}(X_1 = y \,|\, X_0 = x), \, x, \, y \in E)$$

Exemple : rat dans un labyrinthe



- $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
- Matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Not-seven

- $X_0 = 0$
- On lance deux dés
  1. Si $Y_1 + Y_2 = 7$ alors $X_n = 0$ définitivement
  2. Sinon $X_{n+1} = X_n + Y_1 + Y_2$ et on relance les deux dés
- Pour garantir, l'homogénéité, il faut introduire un état « cimetière » : δ

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X_{n+1} = i+2 \,|\, X_n = i) &= \mathbf{P}(X_{n+1} = i+12 \,|\, X_n = i) &&= 1/36\\
\mathbf{P}(X_{n+1} = i+3 \,|\, X_n = i) &= \mathbf{P}(X_{n+1} = i+11 \,|\, X_n = i) &&= 2/36\\
\mathbf{P}(X_{n+1} = i+4 \,|\, X_n = i) &= \mathbf{P}(X_{n+1} = i+10 \,|\, X_n = i) &&= 3/36\\
\mathbf{P}(X_{n+1} = i+5 \,|\, X_n = i) &= \mathbf{P}(X_{n+1} = i+9 \,|\, X_n = i) &&= 4/36\\
\mathbf{P}(X_{n+1} = i+6 \,|\, X_n = i) &= \mathbf{P}(X_{n+1} = i+8 \,|\, X_n = i) &&= 5/36\\
\mathbf{P}(X_{n+1} = \delta \,|\, X_n = i) &= 1/6\\
\mathbf{P}(X_{n+1} = \delta \,|\, X_n = \delta) &= 1.
\end{aligned}$$

Equation de Chapman-Kolmogorov

- Par définition d'une chaîne de Markov

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X_{n+1} = j) &= \sum_{i \in E} \mathbf{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i)\mathbf{P}(X_n = i)\\ &= \sum_{i \in E} \mathbf{P}(X_n = i)p(i, j),\, j \in E,\end{aligned}$$

- en notation matricielle

$$\pi_{n+1} = \pi_n.P \text{ soit } \pi_n = \pi_0.P^n \tag{2}$$

- Si $\pi_0 = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots)$ alors

$$\mathbf{P}_i(X_n = j) = p^{(n)}(i, j)$$

  où $p^{(n)}(i, j)$ est le terme en i^{e} ligne et j^{e} colonne de P^n.
- Comme $P^{n+m} = P^n P^m$,

$$p^{(n+m)}(x, y) = \sum_{z \in E} p^{(n)}(x, z)p^{(m)}(z, y), \tag{3}$$

Algorithme 2. Réalisation d'une variable aléatoire de loi ν

Données : r_0, r_1, $\cdots$

Résultat : un élément de E choisi selon la loi ν

x$\leftarrow$ réalisation d'une loi uniforme sur [0, 1];

n$\leftarrow$ 0;

tant que $x > r_n$ **faire**

| $n \leftarrow n + 1$

fin

retourner $\phi^{-1}(n)$

Simulation d'une chaîne de Markov

Algorithme 3. Simulation d'une trajectoire d'une chaîne de Markov (ν, P)

Données : ν, P, N

Résultat : une trajectoire à N pas de la chaîne de Markov (ν, P)

Choisir x_0 condition initiale selon ν;

pour compteur $\leftarrow 1$ ***à*** N **faire**

    Choisir x_{compteur} selon la loi $(p(x_{\text{compteur}-1}, y), y \in E)$;

fin

retourner $x_0, x_1, \cdots, x_N$

Temps d'arrêt

Définition

Soit $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \cdots, X_n)$. $T : \Omega \to \mathbf{R}^+ \cup \{\infty\}$ est un tda ssi

$$(T \leq n) \in \mathcal{F}_n, \ \forall n.$$

- $\tau = \inf\{n \geq 1, X_n \in A\}$ est un tda
- $\tau = \sup\{n \geq 1, X_n \in A\}$ n'est pas un tda

Tribu $\mathcal{F}_T$

Définition de $\mathcal{F}_T$

T tda.

$$A \in \mathcal{F}_T \iff A \cap (T \leq n) \in \mathcal{F}_n.$$

- X $\mathcal{F}_T$ mesurable veut à peu près dire que

$$X = \phi(X_0, \cdots, X_T)...$$

$$\theta^T(\omega) = (\omega_{T(\omega)}, \omega_{T(\omega)+1}, \cdots).$$

Markov fort

Propriété de Markov fort

$$\mathbf{E}\left[F \circ \theta^T \,|\, \mathcal{F}_T\right] = \mathbf{E}\left[F \,|\, X_0 = X_T\right]. \tag{4}$$

Pour calculer le terme de droite, on calcule $\mathbf{E}\left[F \,|\, X_0 = x\right] = \phi(x)$ et l'on a :

$$\mathbf{E}\left[F \,|\, X_0 = X_T\right] = \phi(X_T).$$

Instants de visite

$$\tau_x^1 = \begin{cases} \infty & \text{si } X_n \neq x \text{ pour tout } n > 0; \\ \inf\{n > 0,\, X_n = x\} & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\tau_x^k = \begin{cases} \infty & \text{si } \tau_x^{k-1} = \infty \text{ ou } X_n \neq x \text{ pour tout } i > \tau \\ \inf\{n > \tau_x^{k-1},\, X_n = x\} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nombre de visites

$$N_x = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{X_n = x\}} \,.$$

Théorème

Pour tout k, les deux événements $\{N_x \geq k\}$ et $\left\{\tau_x^k < \infty\right\}$ coïncident.

Démonstration.

$N_x \geq k$ signifie qu'il y a eu plus de k visites à l'état x, ce qui est très exactement équivalent à dire que $\tau_x^k < \infty$. □

- Pour tout couple (x, y) de E, on a :

$$\mathbf{P}_y(\tau_x^k < \infty) = \mathbf{P}_x(\tau_x^1 < \infty)^{k-1}\mathbf{P}_y(\tau_x^1 < \infty). \tag{5}$$

En particulier, si $x = y$, $\mathbf{P}_x\left(\tau_x^k < \infty\right) = \mathbf{P}_x(\tau_x^1 < \infty)^k$.

- Par ailleurs, on a :

$$\mathbf{E}_y\left[N_x\right] = \frac{\mathbf{P}_y(\tau_x^1 < \infty)}{1 - \mathbf{P}_x(\tau_x^1 < \infty)} = \sum_{n\geq 1} p^{(n)}(y, x). \tag{6}$$

Etats récurrents et transients

Définition

- Un état x est dit récurrent lorsque $\mathbf{P}_x\left(\tau_x^1 < \infty\right) = 1$.
- Sinon, x est dit transient.

Théorème

Soit x un état fixé.

1. Les assertions suivantes sont équivalentes :
   1. x est récurrent,
   2. $\mathbf{P}_x(N_x = \infty) = 1$,
   3. $\mathbf{E}_x[N_x] = \infty$.
2. Les assertions suivantes sont équivalentes :
   1. x est transient,
   2. $\mathbf{P}_x(N_x < \infty) = 1$,
   3. $\mathbf{E}_x[N_x] < \infty$.

Relation entre états

Définition

On dit qu'un état x conduit à un état y et on le note $x \longrightarrow y$, s'il existe un entier strictement positif m tel que $p^{(m)}(x, y) > 0$. Ce qui revient à dire que $\mathbf{P}_x(\tau_y^1 < \infty) = 1$.

Théorème

Si x est un état récurrent et $x \longrightarrow y$, alors $y \longrightarrow x$ et y est récurrent.

Corollaire

La relation $\longrightarrow$ restreinte aux états récurrents est une relation d'équivalence.

Ensemble fermé

Un sous-ensemble F de E est dit fermé, si pour tout x et y :

$$(x \in F \text{ et } x \longrightarrow y) \Longrightarrow y \in F.$$

Autrement dit, $\sum_{y \in F} p(x, y) = 1$ pour tout $x \in F$.

Théorème

Tout ensemble fermé de cardinal fini contient au moins un point récurrent.

Démonstration.

- Soit F un ensemble fermé, si tous ses états sont transients

$$\mathbf{E}_y\left[N_x\right] = \mathbf{P}_y(\tau_x^1 < \infty)\mathbf{E}_x\left[N_x\right] < \infty$$

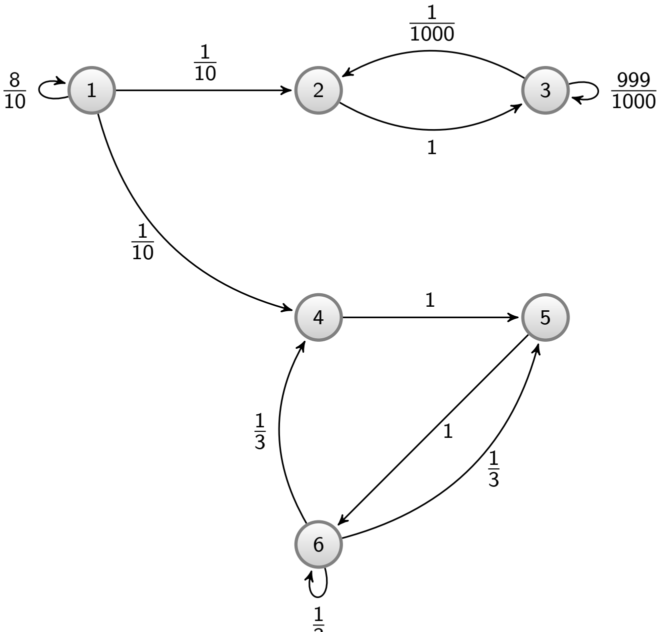
- Or

$$\begin{aligned}\infty > \sum_{x \in F} \mathbf{E}_y\left[N_x\right] &= \sum_{x \in F} \mathbf{E}_y\left[\sum_{n \geq 0} \mathbf{1}_{\{X_n = x\}}\right] \\ &= \sum_{n \geq 0} \mathbf{E}_y\left[\sum_{x \in F} \mathbf{1}_{\{X_n = x\}}\right] = \sum_{n \geq 0} 1 = \infty,\end{aligned}$$

puisque F est fini et fermé.

$\square$

Exemple



Chaîne irréductible

Une chaîne de Markov est dite irréductible lorsque tous les états conduisent les uns aux autres. En particulier, le plus petit sous-espace fermé est E lui-même et tous les états ont même nature.

Récurrence nulle et récurrence positive

Un état récurrent x est dit récurrent positif, si $\mathbf{E}_x\left[\tau_x^1\right] < \infty$; récurrent nul, si $\mathbf{E}_x\left[\tau_x^1\right] = \infty$.

- Un jeu de N cartes est mélangé en le coupant en deux parts qui sont ensuite interverties.
- Chaque mélange du jeu est représenté par une permutation de $\{1, \cdots, N\}$. X_n l'état du paquet de cartes après la n^{e} opération de mélange.
- L'espace d'états est donc $\mathfrak{S}_N$ le groupe des permutations de $\{1, \cdots, N\}$
- Si $X_0 = (3, 2, 1)$ et que la coupe se fait entre la première et la deuxième carte, on a $X_1 = (2, 1, 3)$.
- Soit

$$E_1 = \Big\{\sigma \in \mathfrak{S}_N, \exists k \in \{1, \cdots, N\}, \sigma = (k+1, k+2, \cdots, N, 1, \cdots,$$

- Si la coupe est au niveau de la k^{e} carte, on applique le cycle $(k+1, k+2, \cdots, N, 1, \cdots, k)$ à la situation courante. Comme le choix de l'endroit de la coupe est supposé être uniforme sur $\{1, \cdots, N\}$, on a :

$$\mathbf{P}(X_1 = \tau \,|\, X_0 = \sigma) = \frac{1}{N} \text{ si } \tau\sigma^{-1} \in E_1.$$

- σ conduit à τ si et seulement s'il existe $\rho \in E_1$ tel que $\tau = \rho\sigma$.
- Les classes d'équivalence de la relation $\longrightarrow$ sont celles de la relation $\sigma \mathfrak{R} \tau \equiv \tau\sigma^{-1} \in E_1$.
- Il y a donc $(n-1)!$ classes d'équivalence de cardinal n chacune.
- Toutes ces classes forment des ensembles fermés de cardinal fini qui contiennent donc toutes au moins un point récurrent.
- Comme à l'intérieur de ces classes les états communiquent tous entre eux, ils sont tous récurrents.
- La chaîne est donc récurrente.
- Est-ce que c'est un bon mode de mélange ?

Définition

Soit E un ensemble dénombrable et P une opérateur de transition sur $E \times E$. Une mesure positive finie ν sur E est dite invariante par rapport à P, si et seulement si :

$$\nu = \nu P \text{ c'est-à-dire } \nu(y) = \sum_{x \in E} \nu(x) p(x, y) \quad \text{pour tout } y \in E. \tag{7}$$

Si de plus $\sum \nu(x) = 1$, ν est une probabilité invariante.

Théorème

Soit x un état récurrent, alors la mesure ν définie par :

$$\nu(y) = \mathbf{E}_x \left[\sum_{n=0}^{\tau_x^1 - 1} \mathbf{1}_{\{X_n = y\}} \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}_x(X_n = y,\, \tau_x^1 > n)$$

est une mesure invariante.

Preuve

$$\mathbf{E}_x\left[\sum_{n=0}^{\tau_x^1-1}\mathbf{1}_{\{X_n=y\}}\right]=\sum_{\ell=1}^{\infty}\mathbf{E}_x\left[\sum_{n=0}^{\ell-1}\mathbf{1}_{\{X_n=y\}}\,\mathbf{1}_{\{\tau_x^1=\ell\}}\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{E}_x\left[\sum_{\ell>n}\mathbf{1}_{\{\tau_x^1=\ell\}}\,\mathbf{1}_{\{X_n=y\}}\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{E}_x\left[\mathbf{1}_{\{\tau_x^1>n\}}\,\mathbf{1}_{\{X_n=y\}}\right].$$

Sous $\mathbf{P}_x$, $X_0=X_{\tau_x^1}=x$, $\nu(y)=\mathbf{E}_x\left[\sum_{n=1}^{\tau_x^1}\mathbf{1}_{\{X_n=y\}}\right]$,

$$\nu(y)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{E}_x\left[\mathbf{1}_{\{\tau_x^1\geq n\}}\,\mathbf{1}_{\{X_n=y\}}\right]. \tag{8}$$

Théorème

Si X est irréductible, les trois assertions suivantes sont équivalentes :

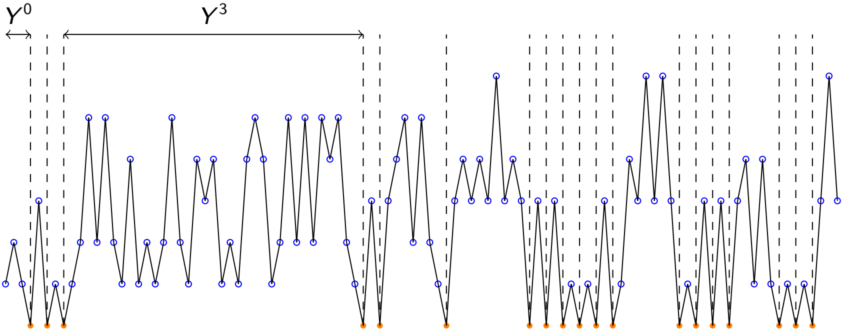
1. l'un des états est récurrent positif ;
2. il existe une probabilité invariante ;
3. tous les états sont récurrents positifs.

De plus, la probabilité invariante est donnée par :

$$\nu(y) = \frac{1}{\mathbf{E}_x\left[\tau_x^1\right]} \mathbf{E}_x \left[\sum_{n=0}^{\tau_x^1 - 1} \mathbf{1}_{\{X_n = y\}} \right].$$

Corollary 1.

Toute chaîne de Markov irréductible sur E de cardinal fini est récurrente positive.


Y^0
Y^3

Ergodicité

Théorème ergodique

Soit X récurrente, irréductible de loi invariante ν. Quelle que soit la condition initiale $x \in E$, pour toute fonction f dans $L^1(\nu)$, pour toute fonction $g \geq 0$ telle que $\sum_y g(y)\nu(y) > 0$, on a :

$$\frac{\sum_{j=0}^n f(X_j)}{\sum_{j=0}^n g(X_j)} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{\sum_{y\in E} f(y)\nu(y)}{\sum_{y\in E} g(y)\nu(y)}, \ \mathbf{P}_x \text{ presque sûrement.}$$

En particulier, pour $f \in L^1(\nu)$, on a :

$$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n} f(X_j) \xrightarrow{n\to\infty} \sum_{y\in E} f(y)\nu(y), \ \mathbf{P}_x \text{ presque sûrement.}$$

Etats périodiques

Définition

Un état x est dit périodique s'il existe un entier $\delta \geq 2$ tel que :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}_x(\tau_x^1 = \delta k) = 1. \tag{9}$$

Le plus petit δ vérifiant (9) est appelé la période de x et nous la noterons $d(x)$. Les états qui ne sont pas périodiques sont appelés apériodiques.

Le rat dans son labyrinthe : les états sont tous de période 2

Théorème de convergence

Soit X une chaîne de Markov irréductible, récurrente positive, apériodique, de matrice de transition P et de probabilité invariante ν. Alors, on a :

$$\lim_{n\to\infty} p^{(n)}(x, y) = \nu(y), \text{ pour tout } x \text{ et tout } y.$$

Cas périodique

Soit X une chaîne de Markov irréductible, récurrente positive, périodique de période d et de probabilité invariante ν. Soit $x \in E$ et $C_0, \cdots, C_{d-1}$ les classes cycliques associées à x. Si $y \in C_r$, on a

$$\lim_{n\to\infty} p^{(nd+r)}(x, y) = d\nu(y).$$

Idée de la preuve

- Sur $E \times E$, on définit la chaîne de Markov $Z_n = (W_n,\, y_n)$ de matrice de transition :

$$\hat{p}((x_1, x_2),\, (y_1,\, y_2)) = p(x_1,\, y_1)p(x_2,\, y_2).$$

- Comme tous les états sont apériodiques, d'après le lemme **??**, à partir d'un certain rang M :

$$p^{(l)}(y_1,\, y_1) > 0 \text{ et } p^{(l)}(x_2, x_2) > 0.$$

  Comme X est irréductible et récurrent, il existe $K \geq M$ et $L \geq M$ tels que :

$$p^{(K)}(x_1, x_2) > 0 \text{ et } p^{(L)}(y_1,\, y_2) > 0.$$

  Par conséquent, le chemin :

$$(x_1,\, y_1) \to (x_2,\, y_1) \to (x_2,\, y_2)$$

  est de probabilité strictement positive pour l'indice $K + L + M$
- DONC Z est une chaîne de Markov irréductible

Suite

- $\hat{\nu}(x, y) = \nu(x)\nu(y)$ définit une probabilité invariante pour la chaîne de Markov Z
- tous les états sont récurrents positifs
- Soit

$$\Delta = \{(x, y) \in E \times E,\, x = y\}\,;$$
$$T = \inf\{n > 0,\, Z_n \in \Delta\}\,.$$

- Sur $\{T \le n\}$, W_n et Y_n ont même loi

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(W_n = y,\ T \le n) &= \sum_x \mathbf{E}\left[\mathbf{1}_{\{W_n=y\}}\,\mathbf{1}_{\{W_T=x\}}\,\mathbf{1}_{\{T\le n\}}\right] \\
&= \sum_x \mathbf{E}\left[\mathbf{1}_{\{W_T=x\}}\,\mathbf{1}_{\{T\le n\}}\,\mathbf{E}\left[\mathbf{1}_{\{W_n=y\}}\,|\,\mathcal{F}_T\right]\right] \\
&= \sum_x \mathbf{E}\left[\mathbf{1}_{\{W_T=x\}}\,\mathbf{1}_{\{T\le n\}}\,\mathbf{E}_x\left[\mathbf{1}_{\{W_{n-T}=y\}}\right]\right] \\
&= \sum_x \mathbf{E}\left[\mathbf{1}_{\{Y_T=x\}}\,\mathbf{1}_{\{T\le n\}}\,\mathbf{E}_x\left[\mathbf{1}_{\{Y_{n-T}=y\}}\right]\right] \\
&= \mathbf{P}(Y_n = y,\ T \le n).
\end{aligned}$$

Suite

- D'après ce qui précède :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(W_n = y) &= \mathbf{P}(W_n = y,\ T \leq n) + \mathbf{P}(W_n = y,\ T > n)\\ &= \mathbf{P}(Y_n = y,\ T \leq n) + \mathbf{P}(W_n = y,\ T > n)\\ &\leq \mathbf{P}(Y_n = y) + \mathbf{P}(W_n = y,\ T > n).\end{aligned}$$

- Symétriquement, on a :

$$\mathbf{P}(Y_n = y) \leq \mathbf{P}(W_n = y) + \mathbf{P}(Y_n = y,\ T > n),$$

- dont on déduit que :

$$\big|\mathbf{P}(W_n = y) - \mathbf{P}(W_n = y)\big| \leq \mathbf{P}(Y_n = y,\ T > n) + \mathbf{P}(W_n = y,\ T > n)$$

- D'où en sommant sur toutes les valeurs possibles de y, on obtient :

$$\sum_y \big|\mathbf{P}(Y_n = y) - \mathbf{P}(W_n = y)\big| \leq 2\mathbf{P}(T > n).$$

$$\sum_y \big|p^{(n)}(x,\ y) - \nu(y)\big| \xrightarrow{n \to \infty} 0,$$

- Trouver l'expression explicite par calcul ou par transformée en z (cf. file M/GI/1)
- Résoudre le système $\pi = \pi P$ et $\pi.e = 1$
- Itérer : $\pi_0 P^n \xrightarrow{n \to \infty} \pi$
- Simuler la chaîne et estimer les valeurs de $\pi(n)$ qui sont intéressantes

On considère la chaîne de Markov à valeurs dans $\{1, 2, 3\}$ dont la matrice de transition est donnée par :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ f(p) & 0 & 1-f(p) \\ 1-f(p) & 0 & f(p) \end{pmatrix}$$

où $p \in [0, 1]$ et $f(p)$ est définie par :

$$f(p) = \begin{cases} 0 & \text{si } p \leq 1/4 \\ 2p - 1/2 & \text{si } 1/4 < p \leq 3/4 \\ 1 & \text{si } p \geq 3/4. \end{cases}$$

1. Donner la classification des états en fonction des valeurs de p.
2. Pour quelles valeurs de p existe-il une probabilité invariante ? La calculer lorsqu'elle existe.
3. Partant de 2, quelle est, en fonction de p, la valeur du temps moyen de retour en 2 ?
4. Soit h la fonction définie par : $h(1) = -1,\ h(2) = 1,\ h(3) = 1$. Que vaut la limite : $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} h(X_j)$ quand n tend vers $+\infty$ pour $p < 3/4$?

Pour le rat dans son labyrinthe, $\pi_0 = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$, calculer π_1 et π_2.

On considère la chaîne de Markov homogène X à deux états A et B de matrice de transition :

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

On cherche le temps de première apparition de la séquence ABA. Pour ce faire, on construit le processus $Y_n = (X_n, X_{n+1}, X_{n+2})$.

1. Montrer que Y est une chaîne de Markov homogène dont on donnera la matrice de transition (sous forme de matrice ou de graphe).
2. Cette chaîne est-elle irréductible ? apériodique ? récurrente positive ?
3. Calculer la probabilité invariante de Y. On pourra numéroter les états dans l'ordre lexicographique : $AAA = 1, AAB = 2, \ldots$
4. En déduire le temps moyen (à l'état invariante) qui s'écoule entre deux occurrences de ABA.
5. On suppose que $X_0 = A$, $X_1 = B$. Donner les équations qui permettent de calculer $\mathbf{E}\left[\tau^1_{ABA}\right]$. Il n'est pas demandé de les résoudre.