Génération de nombres pseudo-aléatoires

1 Nombres pseudo-aléatoires

On entend par suite de nombres pseudo-aléatoires, toute suite constructible dont les propriétés statistiques sont **proches** de celles de la suite $(U_1, U_2, \ldots)$ où les U_i sont des v.a. indépendantes et de loi uniforme sur $[0, 1]$. La génération de suite de nombres pseudo-aléatoires est une tâche complexe. Les générateurs utilisés sont souvent des récurrences avec congruences, c'est-à-dire de la forme :

$$x_{n+1} = ax_n + b \mod [m]. \tag{1}$$

Si ces suites ont un comportement suffisamment erratique pour que la suite de leurs termes puissent être considérée comme aléatoire, elles présentent le principal problème suivant : lorsque l'on retombe sur une valeur déjà atteinte ($x_n = x_{n+k}$) alors tout le reste de la suite se déroule à l'identique ($x_{n+j} = x_{n+k+j}$). Il faut donc entre autre s'assurer que la période de notre suite est raisonnablement grande. À cet égard, les générateurs de nombres pseudo-aléatoires intégrés des ordinateurs sont souvent insuffisants pour les besoins de la simulation, pour certains la période est l'ordre de 65000 alors que le nombre de termes qui nous seront nécessaires approchera le million voire plus. Dans ce qui suit, vous pouvez soit utilisez les fonctions `srand48(),drand48() (librairie stdlib.h)` du compilateur, le générateur aléatoire de Maple ou l'un des 3 générateurs suivants :

1 - Choisir $m = 10^8,\ m_1 = 10^4,\ a = 314125421,\ b = 1,\ 0 < x_0 < m$ dans (1). On travaille systématiquement avec des nombres compris entre 0 et 1 donc on considèrera $u_n = x_n/m$.

Pour éviter les dépassements de capacité quand vous multipliez des entiers de 8 chiffres entre eux, il est nécessaire de faire tous les calculs modulo $m1$. On décompose tous les entiers sous la forme $x = x^1 * 10^4 + x^2$. On peut alors écrire

$$x_n * a \mod m = (x_n^1.a^2 + x_n^2.a^1).10^4 + x_n^2.a^2 \mod m,$$

mais avant de multiplier la parenthèse par 10^4, il faut réduire chacun de ses termes modulo 10^4, c'est-à-dire,

$$10^4(x_n^1.a^2 + x_n^2.a^1) \mod m = 10^4.((x_n^1.a^2)^2 + (x_n^2.a^1)^2)^2.$$

De cette manière on limite les risques de dépassement de capacité.

2 - On veut ici tester un autre générateur de nombre aléatoire a priori plus performant que les autres. On pose $b := 2^{24} = 16777216$, on initialise le générateur avec 24 tirages aléatoires (obtenus par exemple par la fonction *random* du compilateur) d'un nombre entier entre 0 et $b-1$. Soit $x_1, \dots, x_{24}$ ces tirages. On pose $c = 0$. On considère l'application suivante :

$$f(x_1, \dots, x_{24}, c) = \\ \begin{cases} (x_2, \dots, x_{24}, x_{15} - x_1 - c, 0) & si\ x_{15} - x_1 - c \geq 0. \\ (x_2, \dots, x_{24}, x_{15} - x_1 - c + b, 1) & si\ x_{15} - x_1 - c < 0. \end{cases}$$

A chaque appel de ce générateur de nombre aléatoire *rand++*, on retourne comme nombre aléatoire x_1/b et on transforme $(x_1, \dots, x_{24}, c)$ en $f(x_1, \dots, x_{24}, c)$. On peut montrer rigoureusement que la période de ce générateur est de l'ordre de 10^{171}.

3 - Le troisième (écrit par le professeur D. Knuth)est disponible sur `http://www.enst.fr/~decreuse/TP/1A/rng-double.c`

Une prime (... ?) est offerte à ceux d'entre vous qui comprennent ce que fait ce programme.

2 Principes de la simulation

Pour calculer des quantités qui peuvent s'écrire sous forme d'espérance, c'est-à-dire de la forme $E[X]$ on génére un grand nombre $(X_1, \dots, X_n)$ de tirages de X indépendants et on utilise la loi forte des grands nombres qui stipule que

$$E[X] = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Pour simuler des variables aléatoires de loi donnée, on dispose principalement de deux moyens :

1. L'inversion de la fonction de répartition. En effet si la fonction de répartition de la loi est F et U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$ alors la loi de $X = F^{-1}(U)$ a comme fonction de répartition F. F^{-1} est ici l'inverse à droite de F, c'est-à-dire que

$$F^{-1}(\alpha) = \inf\{x,\ F(x) \leq \alpha\}.$$

   On utilise cette méthode pour les v.a. à valeurs discrètes, la loi exponentielle, la loi de Weibull, etc.

2. Dans le cas où la fonction de répartition ne s'inverse pas bien mais on connaît la densité f, on utilise la méthode de rejet. Soit g une densité pour laquelle on sait simuler facilement des v.a. dont la densité de la loi est g et telle que $f(x) \leq ag(x)$ pour un coefficient a donné.

1- Générer un tirage de loi de densité g, soit x le résultat ;

2- Générer un tirage d'une loi uniforme sur $[0, 1]$, soit u le résultat

3- Si $u \leq f(x)/ag(x)$ alors retourner x sinon recommencer en 1.

La preuve que les tirages ainsi engendrés suivent bien une loi de densité f est montré dans le poly de première année.

On est toutefois parfois obligé d'avoir recours à des méthodes ad-hoc pour certaines lois comme les lois bêta, gamma ou gaussienne.

2.1 Loi normale

Dans tout ce qui suit U_1, U_2 représentent des variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0, 1]$. X suit une loi normale de paramètres μ et σ^2 si la densité de sa loi est donnée par :

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}).$$

On a $E[X] = \mu$ et $var(X) = \sigma^2$. Pour générer des tirages selon une loi normale de paramètre 0 et 1, on considère

$$X = \cos(2\pi U_1)\sqrt{-2\log U_2}.$$

Il est bien connu que $\pi =$ ..., voir section 4 du présent document. Remarquons que $Y = \sin(2\pi U_1)\sqrt{-2\log U_2}$ suit aussi une loi gaussienne centrée réduite et qu'elle est indépendante de X. Ensuite la v.a. $\mu + \sigma X$ suit une loi normale de paramètre μ et σ^2.

Dans le cas multidimensionnel, pour générer $(X_1, \ldots, X_n)$ un vecteur gaussien de vecteur moyenne $m = (m_1, \ldots, m_n)$ et de matrice de covariance donnée Γ, on construit $(Y_1, \ldots, Y_n)$ un vecteur composé de n gaussiennes centrées réduites indépendantes et on considère $X = \sigma Y + m$, où σ est la racine carrée autoadjointe de Γ (déterminée par la méthode de Cholesky, voir section 3

2.2 Loi lognormale

Une variable X suit une loi lognormale de paramètres μ et σ^2 (en abrégé $LN(\mu, \sigma)$) si $X = \exp(Y)$ où Y est une variable aléatoire de loi normale de moyenne μ et variance σ^2.

2.3 La loi de Cauchy

X suit une loi de Cauchy de paramètre μ et σ si la densité de sa loi est donnée par

$$\frac{\sigma}{\pi(\sigma^2 + (x-\mu)^2)}.$$

Son espérance et a fortiori sa variance sont infinies, μ représente ici la médiane de X, c'est-à-dire le point tel que $P(X < \mu) = P(X > \mu) = 1/2$. Pour générer une telle loi on considère

$$X = \sigma \tan(\pi(U_1 - 1/2)) + \mu.$$

2.4 La loi exponentielle

X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ lorsque la densité de sa loi est donnée par :

$$\lambda \exp(-\lambda x) \text{ pour } x \geq 0.$$

Sa moyenne et sa variance sont respectivement $1/\lambda$ et $1/\lambda^2$. On la génère de la manière suivante :

$$X = -\frac{1}{\lambda} \log(U_1).$$

2.5 La loi Bêta

X suit une loi Bêta de paramètre a et b si la densité de sa loi est donnée par :

$$\frac{1}{\beta(a,b)} x^{a-1}(1-x)^{\beta-1}\mathbf{1}_{[0,1]}(x)$$

où $\beta(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx$. Lorsque a et b sont inférieurs à 1, on génère une v.a. de cette loi de la manière suivante :

1 - Jusqu'à ce que $x + y \leq 1$,

2 - Générer u suivant ne loi uniforme sur $[0, 1]$, prendre $x = u^{1/a}$;

3 - Générer v suivant une loi uniforme sur $[0, 1]$, prendre $y = v^{1/b}$.

4 - $x/(x + y)$ suit une loi Bêta de paramètres a et b.

2.6 La loi Gamma

X suit une loi gamma de paramètre $k > 0$ et $\lambda > 0$ si la densité est donnée par :

$$\frac{\lambda}{\Gamma(k)} \exp(-\lambda x)(\lambda x)^{k-1} \text{ pour } x \geq 0,$$

où $\Gamma(k) = \int_0^{+\infty} x^{k-1} \exp(-x)\,dx$. Sa moyenne et sa variance sont respectivement k/λ et k/λ^2. Là aussi, il faut faire appel à une méthode ad-hoc :

1 - Poser $m = [k]$ et $q = k - m$.

2 - Générer $z = -\sum_{i=1}^{m} u_i$ où les u_i sont le résultat de i appel à la fonction *random*.

3 - Générer w suivant une loi Bêta de paramètres q et $1 - q$.

4 - Générer $y = \log u$ où u est distribuée uniformément sur $[0, 1]$.

5 - $x = (z + wy)/\lambda$ suit une loi gamma de paramètres k et λ.

2.7 La loi de Weibull

X suit une loi de Weibull de paramètres $\lambda > 0$ et $c > 0$ si la densité est donnée par :

$$\lambda c(\lambda x)^{c-1}\exp(-(\lambda x)^c) \text{ pour } x \geq 0.$$

On a

$$E[X] = \frac{\Gamma(1+1/c)}{\lambda}$$
$$var(X) = \frac{\Gamma(1+2/c) - \Gamma(1+1/c)^2}{\lambda^2}.$$

Pour générer une telle v.a., on utilise :

$$X = \frac{(-\log(1-U_1))^{1/c}}{\lambda}.$$

2.8 Loi du Chi-deux

X suit une loi du chi-deux à n degrés de liberté lorsque $X = \sum_{i=1}^n Z_i^2$ où $(Z_1, \ldots, Z_n)$ est une suite de v.a. gaussiennes centrées réduites indépendantes.

On a

$$E[X] = n$$
$$var(X) = 2n$$

2.9 Loi de Fischer

X suit une loi de Fischer de paramètres α et β lorsque

$$X = \frac{Z_1/\alpha}{Z_2/\beta}$$

, où Z_1 et Z_2 sont des v.a. indépendantes de loi chi-deux de paramètres respectifs α et β.

On a

$$E[X] = \frac{\beta}{\beta - 2}, \text{ si } \beta > 2,$$
$$var(X) = \frac{2\beta^2(\beta+\alpha-2)}{\alpha(\beta-4)(\beta-2)^2}, \text{ si } \beta > 4.$$

Pour générer une telle v.a., on utilise

$$X = \frac{\alpha}{\beta}\frac{Z}{1-Z}$$

où Z suit une loi bêta $(\alpha/2,\ \beta/2)$.

3 Quelques indications suivant le language choisi

3.1 Maple

- Le package stats (invoqué par *with(stats) :*) contient toutes les instructions nécessaires pour générer des v.a. de lois usuelles, construire des histogrammes (*voir tallyinto*, *transform*), etc. La réduction de cholesky s'invoque par *cholesky*.

3.2 matlab

- La décomposition de cholesky s'invoque par *chol*.`http://www.mathworks.com/access/helpdesk/help/techdoc/ref/chol.shtml`
- Le générateur aléatoire est invoqué par *rand* `http://www.mathworks.com/access/helpdesk/help/techdoc/ref/rand.shtml`
- Plus généralement, l'aide en ligne de matlab est accessible à l'adresse `http://www.mathworks.com/access/helpdesk/help/techdoc/ref/ref.shtml`

3.3 C

- Dès que vous utilisez des fonctions cosinus, logarithmes ou autres, vous devez compiler avec un lien sur la librairie math :
  `gcc -O2 nomdefichier.c -o nomdobjet -lm`
- Pour les manipulations d'algèbre linéaire, voir la bibliothèque de programmes *lapack* (`http://www.netlib.org/lapack`).

4 Quelques décimales de π

Il est bien connu que

π = 3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640628620899862803482534211
7067982148086513282306647093844609550582231725359408128481117450284102701938521105559644622948954930381
9644288109756659334461284756482337867831652712019091456485669234603486104543266482133936072602491412737
2458700660631558817488152092096282925409171536436789259036001133053054882046652138414695194151160943305
7270365759591953092186117381932611793105118548074462379962749567351885752724891227938183011949129833673
3624406566430860213949463952247371907021798609437027705392171762931767523846748184676694051320005681271
4526356082778577134275778960917363717872146844090122495343014654958537105079227968925892354201995611212
9021960864034418159813629774771309960518707211349999998372978049951059731732816096318595024459455346908
3026425223082533446850352619311881710100031378387528865875332083814206171776691473035982534904287554687
3115956286388235378759375195778185778053217122680661300192787661119590921642019893809525720106548586327
8865936153381827968230301952035301852968995773622599413891249721775283479131515574857242454150695950829
5331168617278558890750983817546374649393192550604009277016711390098488240128583616035637076601047101819
4295559619894676783744944825537977472684710404753464620804668425906949129331367702898915210475216205696
6024058038150193511253382430035587640247496473263914199272604269922796782354781636009341721641219924586
3150302861829745557067498385054945885869269956909272107975093029553211653449872027559602364806654991198
8183479775356636980742654252786255181841757467289097777279380008164706001614524919217321721477235014144
1973568548161361157352552133475741849468438523323907394143334547762416862518983569485562099219222184272
5502542568876717904946016534668049886272327917860857843838279679766814541009538837863609506800642251252
0511739298489608412848862694560424196528502221066118630674427862203919494504712371378696095636437191728
7467764657573962413890865832645995813390478027590099465764078951269468398352595709825822620522489407726
7194782684826014769909026401363944374553050682034962524517493996514314298091906592509372216964615157098
5838741059788595977297549893016175392846813826868386894277415599185592524595395943104997252468084598727
3644695848653836736222626099124608051243884390451244136549762780797715691435997700129616089441694868555
8484063534220722258284886481584560285060168427394522674676788952521385225499546667278239864565961163548
8623057745649803559363456817432411251507606947945109659609402522887971089314566913686722874894056010150
3308617928680920874760917824938589009714909675985261365549781893129784821682998948722658804857564014270
4775551323796414515237462343645428584447952658678210511413547357395231134271661021359695362314429524849
3718711014576540359027993440374200731057853906219838744780847848968332144571386875194350643021845319104
8481005370614680674919278191197939952061419663428754440643745123718192179998391015919561814675142691239
7489409071864942319615679452080951465502252316038819301420937621378559566389377870830390697920773467221
8256259966150142150306803844773454920260541466592520149744285073251866600213243408819071048633173464965
1453905796268561005508106658796998163574736384052571459102897064140110971206280439039759515677157700420
3378699360072305587631763594218731251471205329281918261861258673215791984148488291644706095752706957220
9175671167229109816909152801735067127485832228718352093539657251210835791513698820914442100675103346711
0314126711136990865851639831501970165151168517143765761835155650884909989859982387345528331635507647918
5358932261854896321329330898570642046752590709154814165498594616371802709819943099244889575712828905923
2332609729971208443357326548938239119325974636673058360414281388303203824903758985243744170291327656180
9377344403070746921120191302033038019762110110044929321516084244485963766983895228684783123552658213144
9576857262433441893039686426243410773226978028073189154411010446823252716201052652272111660396665573092
5471105578537634668206531098965269186205647693125705863566201855810072936065987648611791045334885034611
3657686753249441668039626579787718556084552965412665408530614344431858676975145661406800700237877659134
4017127494704205622305389945613140711270004078547332699390814546646458807972708266830634328587856983052
3580893306575740679545716377525420211495576158140025012622859413021647155097925923099079654737612551765
6751357517829666454779174501129961489030463994713296210734043751895735961458901938971311179042978285647
5032031986915140287080859904801094121472213179476477726224142548545403321571853061422881375850430633217
5182979866223717215916077166925474873898665494945011465406284336639379003976926567214638530673609657120
9180763832716641627488880078692560290228472104031721186082041900042296617119637792133757511495950156604
9631862947265473642523081770367515906735023507283540567040386743513622224771589150495309844489333096340
8780769325993978054193414473774418426312986080998886874132604721569516239658645730216315981931951673538
1297416772947867242292465436680098067692823828068996400482435403701416314965897940924323789690706977942
2362508221688957383798623001593776471651228935786015881617557829735233446042815126272037343146531977774
1603199066554187639792933441952154134189948544473456738316249934191318148092777710386387734317720754565
4532207770921201905166096280490926360197598828161332316663652861932668633606273567630354477628035045077
7235547105859548702790814356240145171806246436267945612753181340783303362542327839449753824372058353114
7711992606381334677687969597030983391307710987040859133746414428227726346594704745878477872019277152807
3176790770715721344473060570073349243693113835049316312840425121925651798069411352801314701304781643788
5185290928545201165839341965621349143415956258658655705526904965209858033850722426482939728584783163057
7775606888764462482468579260395352773480304802900587607582510474709164396136267604492562742042083208566
1190625454337213153595845068772460290161876679524061634252257719542916299193064553779914037340432875262

8889639958794757291746426357455254079091451357111369410911939325191076020825202618798531887705842972591
6778131496990090192116971737278476847268608490033770242429165130050051683233643503895170298939223345172
2013812806965011784408745196012122859937162313017114448464090389064495444006198690754851602632750529834
9187407866808818338510228334508504860825039302133219715518430635455007668282949304137765527939751754613
9539846833936383047461199665385815384205685338621867252334028308711232827892125077126294632295639898989
3582116745627010218356462201349671518819097303811980049734072396103685406643193950979019069963955245300
5450580685501956730229219139339185680344903982059551002263535361920419947455385938102343955449597783779
0237421617271117236434354394782218185286240851400666044332588856986705431547069657474585503323233421073
0154594051655379068662733379958511562578432298827372319898757141595781119635833005940873068121602876496
2867446047746491599505497374256269010490377819868359381465741268049256487985561453723478673303904688383
4363465537949864192705638729317487233208376011230299113679386270894387993620162951541337142489283072201
2690147546684765357616477379467520049075715552781965362132392640616013635815590742202020318727760527721
9005561484255518792530343513984425322341576233610642506390497500865627109535919465897514131034822769306
2474353632569160781547818115284366795706110861533150445212747392454494542368288606134084148637767009612
0715124914043027253860764823634143346235189757664521641376796903149501910857598442391986291642193994907
2362346468441173940326591840443780513338945257423995082965912285085558215725031071257012668302402929525
2201187267675622041542051618416348475651699981161410100299607838690929160302884002691041407928862150784
2451670908700069928212066041837180653556725253256753286129104248776182582976515795984703562226293486003
4158722980534989650226291748788202734209222245339856264766914905562842503912757710284027998066365825488
9264880254566101729670266407655904290994568150652653053718294127033693137851786090407086671149655834343
4769338578171138645587367812301458768712660348913909562009939361031029161615288138437909904231747336394
8045759314931405297634757481193567091101377517210080315590248530906692037671922033229094334676851422144
7737939375170344366199104033751117354719185504644902636551281622882446257591633303910722538374218214088
3508657391771509682887478265699599574490661758344137522397096834080053559849175417381883999446974867626
5516582765848358845314277568790029095170283529716344562129640435231176006651012412006597558512761785838
2920419748442360800719304576189323492292796501987518721272675079812554709589045563579212210333466974992
3563025494780249011419521238281530911407907386025152274299581807247162591668545133312394804947079119153
2673430282441860414263639548000448002670496248201792896476697583183271314251702969234889627668440323260
9275249603579964692565049368183609003238092934595889706953653494060340216654437558900456328822505452556
4056448246515187547119621844396582533754388569094113031509526179378002974120766514793942590298969594699
5565761218656196733786236256125216320862869222103274889218654364802296780705765615144632046927906821207
3883778142335628236089632080682224680122482611771858963814091839036736722208883215137556003727983940041
5297002878307667094447456013455641725437090697939612257142989467154357846878861444581231459357198492252
8471605049221242470141214780573455105008019086996033027634787081081754501193071412233908663938339529425
7869050764310063835198343893415961318543475464955697810382930971646514384070070736041123735998434522516
1050702705623526601276484830840761183013052793205427462865403603674532865105706587488225698157936789766
9742205750596834408697350201410206723585020072452256326513410559240190274216248439140359989535394590944
0704691209140938700126456001623742880210927645793106579229552498872758461012648369998922569596881592056
0010165525637568

à 10^{-10000} près.