

## Module OPTIM

*Durée : 1 h 30.*

### Corrigé

#### Partie I (14 points)

1. (2,5 points) On considère le système  $(S_\alpha)$  suivant :

$$\begin{cases} t_1 + 2t_2 - t_3 \geq 1 \\ 2t_1 + t_2 - t_3 \geq 1 \\ -4t_1 - 3t_2 + t_3 \geq \alpha \\ t_1 \geq 0, t_2 \geq 0, t_3 \geq 0 \end{cases}$$

où  $\alpha$  est un paramètre réel quelconque.

On cherche à déterminer les valeurs de  $\alpha$  pour lesquelles le système  $(S_\alpha)$  admet au moins une solution. Il s'agit d'indiquer une méthode qui permette de résoudre cette question en utilisant l'algorithme du simplexe. On mettra le problème sous forme d'un problème d'optimisation linéaire  $(R_\alpha)$  ; on mettra le problème  $(R_\alpha)$  sous forme standard, puis, après avoir introduit des variables d'écart, on écrira, en fonction de  $\alpha$ , un dictionnaire réalisable du problème  $(R_\alpha)$ . On ne résoudra pas le problème  $(R_\alpha)$  et on ne donnera donc pas les valeurs de  $\alpha$  pour lesquelles le système admet au moins une solution.

#### Corrigé

Considérons le problème  $(R_\alpha)$  suivant :

Minimiser  $t_0$

avec les contraintes

$$\begin{cases} -t_1 - 2t_2 + t_3 \leq -1 + t_0 \\ -2t_1 - t_2 + t_3 \leq -1 + t_0 \\ 4t_1 + 3t_2 - t_3 \leq -\alpha + t_0 \\ t_0 \geq 0, t_1 \geq 0, t_2 \geq 0, t_3 \geq 0 \end{cases}$$

Si le système  $(S_\alpha)$  admet une solution, en complétant cette solution par  $t_0 = 0$ , on obtient que le minimum de  $(R_\alpha)$  vaut 0. Réciproquement, si le minimum de  $(R_\alpha)$  vaut 0, dans la solution correspondante, on a  $t_0 = 0$ , et on obtient en conséquence, en utilisant les valeurs des autres variables, une solution pour le système  $(S_\alpha)$ . Sous forme standard, le problème  $(R_\alpha)$  s'écrit :

Maximiser  $-t_0$

avec les contraintes

$$\begin{cases} -t_0 - t_1 - 2t_2 + t_3 \leq -1 \\ -t_0 - 2t_1 - t_2 + t_3 \leq -1 \\ -t_0 + 4t_1 + 3t_2 - t_3 \leq -\alpha \\ t_0 \geq 0, t_1 \geq 0, t_2 \geq 0, t_3 \geq 0 \end{cases}$$

En introduisant les variables d'écart, le problème s'écrit :

Maximiser  $-t_0$

avec les contraintes

$$\begin{cases} -t_0 - t_1 - 2t_2 + t_3 + t_4 & = -1 \\ -t_0 - 2t_1 - t_2 + t_3 + t_5 & = -1 \\ -t_0 + 4t_1 + 3t_2 - t_3 + t_6 & = -\alpha \\ t_0 \geq 0, t_1 \geq 0, t_2 \geq 0, t_3 \geq 0, t_4 \geq 0, t_5 \geq 0, t_6 \geq 0 \end{cases}$$

Considérons le dictionnaire ci-dessous.

$$\begin{aligned} t_4 &= -1 + t_0 + t_1 + 2t_2 - t_3 \\ t_5 &= -1 + t_0 + 2t_1 + t_2 - t_3 \\ t_6 &= -\alpha + t_0 - 4t_1 - 3t_2 + t_3 \\ w &= -t_0 \end{aligned}$$

Le problème s'écrit avec ce dictionnaire : maximiser  $w$ , avec, pour  $i$  vérifiant  $0 \leq i \leq 6$ ,  $t_i \geq 0$ .

Le dictionnaire n'est pas réalisable car, dans la solution basique associée,  $t_4 = -1 < 0$ .

Si  $\alpha \leq 1$ , on exprime  $t_0$  en fonction de  $t_1, t_2, t_3$  et  $t_4$  en utilisant la première équation et on obtient le dictionnaire réalisable suivant :

$$\begin{aligned} t_0 &= 1 - t_1 - 2t_2 + t_3 + t_4 \\ t_5 &= t_1 - t_2 + t_4 \\ t_6 &= 1 - \alpha - 5t_1 - 5t_2 + 2t_3 + t_4 \\ w &= -1 + t_1 + 2t_2 - t_3 - t_4 \end{aligned}$$

Si  $\alpha > 1$ , on exprime  $t_0$  en fonction de  $t_1, t_2, t_3$  et  $t_6$  en utilisant la troisième équation et on obtient le dictionnaire réalisable suivant :

$$\begin{aligned} t_0 &= \alpha + 4t_1 + 3t_2 - t_3 + t_6 \\ t_4 &= \alpha - 1 + 5t_1 + 5t_2 - 2t_3 + t_6 \\ t_5 &= \alpha - 1 + 6t_1 + 4t_2 - 2t_3 + t_6 \\ w &= -\alpha - 4t_1 - 3t_2 + t_3 - t_6 \end{aligned}$$

**Fin de corrigé**

On considère maintenant le problème (P) suivant :

$$\begin{aligned} &\text{Maximiser } z = x_1 + x_2 - 3x_3 \\ &\text{avec les contraintes } \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 \leq 10 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 \leq 8 \\ -x_1 - x_2 + x_3 \leq 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

On notera  $x_4, x_5$  et  $x_6$  les variables d'écart correspondant à cette formulation de (P).

2. (0,5 point) Mettre le problème sous forme matricielle en introduisant la matrice  $A$  et les vecteurs  $c, b$  et  $x$  selon les notations du cours.

**Corrigé**

$$\text{Par définition des variables d'écart, on a les contraintes : } \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 = 10 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_5 = 8 \\ -x_1 - x_2 + x_3 + x_6 = 1 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}, c = (1 \quad 1 \quad -3 \quad 0 \quad 0 \quad 0) \text{ et } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix}$$

Le problème s'écrit alors : maximiser  $z = c.x$  avec  $A.x = b$  et  $x \geq 0$ .

**Fin de corrigé**

3. (1 point) Indiquer une base réalisable pour le problème (P) pour laquelle la solution basique associée est donnée par :  $x_1 = 2, x_2 = 4, x_3 = 0$ .

**Corrigé**

Les valeurs  $x_1 = 2, x_2 = 4, x_3 = 0$  impliquent  $x_4 = 0, x_5 = 0, x_6 = 7$ . Dans une solution basique, toute variable non nulle est en base, et le nombre de variables de base doit être ici égal à 3 ; ceci montre que la base correspondant à la solution indiquée ne peut être que  $\{x_1, x_2,$

$x_6\}$  ; la matrice  $B$  extraite de  $A$  correspondant à cette base est :  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ , dont le

déterminant vaut  $-3$  ;  $B$  est inversible. Il s'agit bien d'une base ; elle est réalisable car la solution basique correspondant,  $x_1 = 2, x_2 = 4, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0, x_6 = 7$  a toutes ses

composantes positives ou nulles. On posera  $x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_6 \end{pmatrix}$ .

**Fin de corrigé**

4. (2 points) Déterminer une solution optimale du problème (P). On appliquera de préférence la forme matricielle de la méthode du simplexe qu'on initialisera avec la base déterminée dans la question précédente (une résolution avec une autre méthode ou une autre base de départ ne donnera pas la totalité des points).

**Corrigé**

On effectue une étape de la méthode du simplexe à partir de la base  $x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_6 \end{pmatrix}$ . On a :

$$x_B^* = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } c_B = (1, 1, 0).$$

- Calcul de  $y = (y_1, y_2, y_3)$ . On a :  $y.B = c_B$ , ce qui s'écrit :

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 - y_3 = 1 \\ 2y_1 + y_2 - y_3 = 1 \\ y_3 = 0 \end{cases}$$

qui a pour solution :  $y_1 = 1/3, y_2 = 1/3, y_3 = 0$ .

- Recherche d'une variable entrante

La variable  $x_3$  est entrante si et seulement si :  $y.a_3 < c_3$ , ce qui s'écrit :

$$-4 \times 1/3 - 3 \times 1/3 + 1 \times 0 < -3, \text{ ou encore } -7/3 < -3, \text{ ce qui n'est pas vérifié.}$$

La variable  $x_4$  est entrante si et seulement si :  $y.a_4 < c_4$ , ce qui s'écrit :  $1/3 < 0$ , ce qui n'est pas vérifié.

La variable  $x_5$  est entrante si et seulement si :  $y.a_5 < c_5$ , ce qui s'écrit encore :  $1/3 < 0$ , ce qui n'est pas vérifié.

Aucune variable n'est entrante, la solution actuelle est optimum : l'optimum est obtenue pour  $x_1 = 2, x_2 = 4, x_3 = 0$  et vaut 6.

**Fin de corrigé**

5. (2 points) En utilisant un théorème du cours, estimer la variation de l'optimum du problème s'il devient :

$$\begin{aligned} & \text{Maximiser } z = x_1 + x_2 - 3x_3 \\ & \text{avec les contraintes } \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 \leq 11 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 \leq 9 \\ -x_1 - x_2 + x_3 \leq 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Vérifier que cette estimation est exacte en indiquant les valeurs des variables donnant l'optimum du nouveau problème.

**Corrigé**

La solution optimale étant non dégénérée, le théorème portant sur les variations des ressources indique que, si cette variation est assez petite, l'optimum varie de  $y \cdot \delta b$ , où  $y$  est le vecteur  $y$  obtenu dans la dernière étape de la forme matricielle de la méthode du simplexe et  $\delta b$  contient les variations des ressources ; en notant  $\delta z$  la variation de l'optimum :  $\delta b = 1/3 \times 1 + 1/3 \times 1 + 0 \times 1 = 2/3$ . Si la variation est assez petite, l'optimum du problème devient donc égal à  $6 + 2/3 = 20/3$ .

Étant donné que seul le vecteur  $b$  a varié entre le problème initial et le problème modifié, cette solution est exacte si la solution associée à  $x_B$  reste réalisable. Cette solution est

donnée par le système :  $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 11 \\ 2x_1 + x_2 = 9 \\ -x_1 - x_2 + x_6 = 2 \end{cases}$ , les autres variables, hors-base, restant nulles. La

solution de ce système est :  $x_1 = 7/3, x_2 = 13/3, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0, x_6 = 26/3$ . Toutes les valeurs étant positives ou nulles, la solution est optimale. On vérifie que, pour ces valeurs, la fonction objectif vaut bien  $20/3$ .

**Fin de corrigé**

On note  $(P_\alpha)$  le problème :

$$\begin{aligned} & \text{Maximiser } z = x_1 + x_2 + \alpha x_3 \\ & \text{avec les contraintes } \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 \leq 10 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 \leq 8 \\ -x_1 - x_2 + x_3 \leq 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

6. (1 point) Indiquer les valeurs de  $\alpha$  pour lesquelles la base optimale du problème  $(P)$  reste optimale pour  $(P_\alpha)$ .

**Corrigé**

La base optimale du problème  $(P)$  reste réalisable puisque seul le vecteur  $c$  est modifié. Le calcul du vecteur  $y$  n'est pas non plus modifié car la variable  $x_3$  est hors-base. Les variables  $x_4$  et  $x_5$  ne sont toujours pas entrantes. La base reste optimale si et seulement si la variable  $x_3$  n'est pas entrante. Cela s'écrit, en reprenant la question 3 :  $\alpha \leq -7/3$ .

**Fin de corrigé**

7. (2 points) On suppose que  $\alpha$  est tel que la base optimale du problème  $(P)$  n'est pas optimale pour  $(P_\alpha)$ . Résoudre dans ce cas le problème  $(P_\alpha)$ .

**Corrigé**

Si  $\alpha > -7/3$ , la variable  $x_3$  est entrante ; on reprend la méthode du simplexe sous sa forme matricielle.

On calcule  $d$  par :  $B \cdot d = a_3$ . On obtient le système :

$$\begin{cases} d_1 + 2d_2 & = -4 \\ 2d_1 + d_2 & = -3 \\ -d_1 - d_2 + d_3 & = 1 \end{cases}$$

qui admet pour solution :  $d_1 = -2/3, d_2 = -5/3, d_3 = -4/3$ .

On a alors :  $x_B = x_B^* - x_3 \cdot d$ , ce qui donne :

$$\begin{cases} x_1 = 2 + 2/3 x_3 \\ x_2 = 4 + 5/3 x_3 \\ x_6 = 7 + 4/3 x_3 \end{cases}$$

les autres variables,  $x_4$  et  $x_5$  restant nulles.

$z$  vaut alors  $6 + (7/3 + \alpha)x_3$ , avec  $7/3 + \alpha \geq 0$ , et la variable  $x_3$  peut être aussi grande qu'on veut, en gardant la positivité des six variables : le problème n'est pas borné.

**Fin de corrigé**

8. (1 point) Écrire le problème  $(Q_\alpha)$  dual de  $(P_\alpha)$ .

**Corrigé**

Le problème dual s'écrit :

$$\begin{aligned} & \text{Minimiser } w = 10y_1 + 8y_2 + y_3 \\ & \text{avec les contraintes } \begin{cases} y_1 + 2y_2 - y_3 \geq 1 \\ 2y_1 + y_2 - y_3 \geq 1 \\ -4y_1 - 3y_2 + y_3 \geq \alpha \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

**Fin de corrigé**

9. (2 points) On revient à la question 1. Résoudre cette question en utilisant les questions 6, 7 et 8.

**Corrigé**

L'ensemble des solutions du système  $(S_\alpha)$ , après avoir renommé les variables, est le domaine réalisable du problème  $(Q_\alpha)$ . Si  $\alpha \leq -7/3$ , le problème  $(P_\alpha)$  admet une solution optimale, ce qui entraîne que  $(Q_\alpha)$  admet une solution optimale, son domaine réalisable est donc non vide.

Si  $\alpha > -7/3$ , le problème  $(P_\alpha)$  est non borné ; supposons que le domaine réalisable de  $(Q_\alpha)$  soit non vide, toute valeur obtenue par la fonction objectif  $w$  de  $(Q_\alpha)$  serait un majorant des valeurs atteintes par la fonction objectif de  $(P_\alpha)$ , ce qui entraînerait que le problème  $(P_\alpha)$  serait borné. Le domaine réalisable de  $(Q_\alpha)$  est vide.

Le système  $(S_\alpha)$  admet au moins une solution si et seulement si  $\alpha \leq -7/3$ .

**Fin de corrigé**

**Partie 2** (6 points)

On considère le problème  $(P_\alpha)$  suivant :

$$\begin{aligned} & \text{Minimiser } f_\alpha(x, y) = (x-2)^2 + \alpha(y-1)^2 \\ & \text{avec les contraintes } \begin{cases} x^2 + (y+1)^2 \leq 2 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

où  $\alpha$  est un paramètre réel positif ou nul.

1. (3 points) Indiquer pour quelles valeurs de  $\alpha$  le point  $(1, 0)$  est un minimum local ( $P$ ) (pour ces mêmes valeurs, il s'agit en fait d'un minimum global, mais on ne demande pas de le prouver).

**Corrigé**

Remarquons d'abord que la fonction  $f_\alpha(x, y)$  est convexe. En effet, sa matrice hessienne est :  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ , dont les valeurs propres sont 2 et  $\alpha$ , qui sont des nombres positifs.

Posons :  $h_1(x, y) = 2 - x^2 - (y + 1)^2$ ,  $h_2(x, y) = x$ ,  $h_3(x, y) = y$ .

Minimiser  $f_\alpha(x, y)$

Le problème s'écrit : avec  $\begin{cases} h_1(x, y) \geq 0 \\ h_2(x, y) \geq 0 \\ h_3(x, y) \geq 0 \end{cases}$

La matrice hessienne de la fonction  $h_1$  vaut :  $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ , et a donc ses valeurs propres,  $-2$  et  $-2$ , strictement négatives. La fonction  $h_1$  est concave, les fonctions  $h_2$  et  $h_3$  sont concaves car linéaires. La condition de Kuhn et Tucker pour être un minimum local est donc ici nécessaire et suffisante.

On a :  $h_1(1, 0) = 0$ ,  $h_2(1, 0) = 1$ ,  $h_3(1, 0) = 0$ . Seuls les gradients des fonctions  $h_1$  et  $h_3$  au point  $(1, 0)$  interviennent dans la condition de Kuhn et Tucker en ce point.

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2(x-2) \\ 2\alpha(y-1) \end{pmatrix}, \quad \nabla f(1, 0) = \begin{pmatrix} -2 \\ -2\alpha \end{pmatrix}.$$

$$\nabla h_1(x, y) = \begin{pmatrix} -2x \\ -2(y+1) \end{pmatrix}, \quad \nabla h_1(1, 0) = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

$$\nabla h_3(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \nabla h_3(1, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Décomposons  $\nabla f(1, 0)$  dans la base constituées de  $\nabla h_1(1, 0)$  et  $\nabla h_3(1, 0)$  en écrivant  $\nabla f(1, 0) = \mu_1 \nabla h_1(1, 0) + \mu_3 \nabla h_3(1, 0)$ . Le point  $(1, 0)$  est un minimum local si et seulement si les coefficients  $\mu_1$  et  $\mu_3$  sont positifs ou nuls

La relation  $\nabla f(1, 0) = \mu_1 \nabla h_1(1, 0) + \mu_3 \nabla h_3(1, 0)$  s'écrit :

$$\begin{cases} -2 = -2\mu_1 \\ -2\alpha = -2\mu_1 + \mu_3 \end{cases} \text{ ou encore : } \begin{cases} \mu_1 = 1 \\ \mu_3 = 2(1 - \alpha) \end{cases}$$

Le point  $(1, 0)$  est un minimum local (et même un minimum global) si et seulement si :  $\alpha \leq 1$  (en gardant l'hypothèse  $\alpha \geq 0$ ).

**Fin de corrigé**

On considère maintenant le problème ( $P_2$ ) suivant :

$$\begin{aligned} &\text{Minimiser } f(x, y) = (x-2)^2 + 2(y-1)^2 \\ &\text{avec les contraintes } \begin{cases} x^2 + (y+1)^2 \leq 2 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

2. (1 point) On se propose de relâcher la contrainte  $x^2 + (y + 1)^2 \leq 2$  au sens de la relaxation lagrangienne. Écrire la fonction de Lagrange correspondante, puis la fonction duale  $w$  et enfin le problème dual.

**Corrigé**

Avant de relâcher la contrainte  $x^2 + (y + 1)^2 \leq 2$ , on l'écrit :

$$x^2 + (y + 1)^2 - 2 \leq 0.$$

La fonction de Lagrange est définie, pour  $\lambda \geq 0$ , par :

$$L(x, y, \lambda) = (x - 2)^2 + 2(y - 1)^2 + \lambda(x^2 + (y + 1)^2 - 2)$$

ou encore :  $L(x, y, \lambda) = [(x - 2)^2 + \lambda x^2] + [2(y - 1)^2 + \lambda(y + 1)^2] - 2\lambda$

La fonction duale est définie, pour  $\lambda \geq 0$ , par :

$$w(\lambda) = \text{minimum}_{x \geq 0, y \geq 0} L(x, y, \lambda).$$

Le problème dual est : maximiser  $w(\lambda)$ , avec  $\lambda \geq 0$ .

**Fin de corrigé**

3. (2 points) Calculer  $w(1)$  et  $w(3)$ . Indiquer ce qu'on peut en déduire pour le problème  $(P_2)$ .

**Corrigé**

$$w(1) = \text{minimum}_{x \geq 0, y \geq 0} L(x, y, 1).$$

$$L(x, y, 1) = [(x - 2)^2 + x^2] + [2(y - 1)^2 + (y + 1)^2] - 2.$$

La fonction  $g(x) = (x - 2)^2 + x^2$  a pour dérivée :  $g'(x) = 4x - 4$ , et est donc minimum pour  $x = 1$  ; son minimum pour  $x \geq 0$  vaut 2.

La fonction  $k(y) = 2(y - 1)^2 + (y + 1)^2$  a pour dérivée :  $k'(y) = 6y - 2$ , et est donc minimum pour  $y = 1/3$  ; son minimum pour  $y \geq 0$  vaut  $25/9$ .

$$\text{D'où : } w(1) = 2 + 24/9 - 2 : w(1) = 24/9 = 8/3.$$

$$w(3) = \text{minimum}_{x \geq 0, y \geq 0} L(x, y, 3).$$

$$L(x, y, 3) = [(x - 2)^2 + 3x^2] + [2(y - 1)^2 + 3(y + 1)^2] - 6.$$

La fonction  $g(x) = (x - 2)^2 + 3x^2$  a pour dérivée :  $g'(x) = 8x - 4$ , et est donc minimum pour  $x = 1/2$  ; son minimum pour  $x \geq 0$  vaut 3.

La fonction  $k(y) = 2(y - 1)^2 + 3(y + 1)^2$  a pour dérivée :  $k'(y) = 10y + 2$ , et est donc minimum pour  $y = -1/5$  ; l'étude des variations de  $k$  montre que son minimum pour  $y \geq 0$  est atteint pour  $y = 0$  et vaut 5.

$$\text{D'où : } w(3) = 3 + 5 - 6 : w(3) = 2.$$

Comme le maximum de  $w$  minore le minimum du problème  $(P_2)$ , le minimum de  $(P_2)$  est au moins égal à  $w(1)$  et  $w(3)$  ; le minimum du problème  $(P_2)$  vaut au moins  $8/3$ .

**Fin de corrigé**