Module OPTIM

Durée : 1 h 30.
Tous documents autorisés ; calculatrices autorisées ; ordinateurs interdits.
Le barème n'est donné qu'à titre indicatif et pourra être légèrement modifié.
Les parties 1 et 2 sont indépendantes.

Partie 1 (14 points)
La question 1 de cette partie est indépendante des autres, sauf de la question 9.
1. (2,5 points) On considère le système (S_α) suivant :

$$\begin{cases} t_1 + 2t_2 - t_3 \geq 1 \\ 2t_1 + t_2 - t_3 \geq 1 \\ -4t_1 - 3t_2 + t_3 \geq \alpha \\ t_1 \geq 0, t_2 \geq 0, t_3 \geq 0 \end{cases}$$

où α est un paramètre réel quelconque.
On cherche à déterminer les valeurs de α pour lesquelles le système (S_α) admet au moins une solution. Il s'agit d'indiquer une méthode qui permette de résoudre cette question en utilisant l'algorithme du simplexe. Plus précisément : mettre le problème sous forme d'un problème d'optimisation linéaire (R_α), puis mettre le problème (R_α) sous forme standard, enfin, après avoir introduit des variables d'écart, écrire, en fonction de α, un dictionnaire réalisable du problème (R_α). On ne résoudra pas le problème (R_α) et on ne donnera donc pas les valeurs de α pour lesquelles le système admet au moins une solution.

On considère maintenant le problème (P) suivant :

$$\text{Maximiser } z = x_1 + x_2 - 3x_3$$
$$\text{avec les contraintes } \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 \leq 10 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 \leq 8 \\ -x_1 - x_2 + x_3 \leq 1 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

On notera x_4, x_5 et x_6 les variables d'écart correspondant à cette formulation de (P).

2. (0,5 point) Mettre le problème (P) sous forme matricielle en introduisant la matrice A et les vecteurs c, b et x selon les notations du cours.

3. (1 point) Indiquer une base réalisable pour le problème (P) pour laquelle la solution basique associée est donnée par : $x_1 = 2$, $x_2 = 4$, $x_3 = 0$.

4. (2 points) Déterminer une solution optimale du problème (P). On appliquera de préférence la forme matricielle de la méthode du simplexe qu'on initialisera avec la base déterminée dans la question précédente (une résolution avec une autre méthode ou une autre base de départ ne donnera pas la totalité des points).

5. (2 points) En utilisant un théorème du cours, estimer la variation de l'optimum du problème s'il devient :

$$\text{Maximiser } z = x_1 + x_2 - 3x_3$$
$$\text{avec les contraintes } \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 \le 11 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 \le 9 \\ -x_1 - x_2 + x_3 \le 2 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0 \end{cases}$$

Vérifier que cette estimation est exacte en déterminant les valeurs des variables donnant l'optimum du nouveau problème.

On note (P_α) le problème :

$$\text{Maximiser } z = x_1 + x_2 + \alpha x_3$$
$$\text{avec les contraintes } \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 \le 10 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 \le 8 \\ -x_1 - x_2 + x_3 \le 1 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0 \end{cases}$$

6. (1 point) Indiquer les valeurs de α pour lesquelles la base optimale du problème (P) reste optimale pour (P_α).

7. (2 points) On suppose que α est tel que la base optimale du problème (P) n'est pas optimale pour (P_α). Résoudre dans ce cas le problème (P_α).

8. (1 point) Écrire le problème (Q_α) dual de (P_α).

9. (2 points) On revient à la question 1. Résoudre cette question en utilisant les questions 6, 7 et 8.

Partie 2 (6 points)

On considère le problème (P_α) suivant :

$$\text{Minimiser } f_\alpha(x, y) = (x-2)^2 + \alpha(y-1)^2$$
$$\text{avec les contraintes } \begin{cases} x^2 + (y+1)^2 \le 2 \\ x \ge 0, y \ge 0 \end{cases}$$

où α est un paramètre réel positif ou nul.

1. (3 points) Indiquer pour quelles valeurs de α le point (1, 0) est un minimum de local (P) (pour ces mêmes valeurs, il s'agit en fait d'un minimum global, mais on ne demande pas de le prouver).

On considère maintenant le problème (P_2) suivant :

$$\text{Minimiser } f(x, y) = (x-2)^2 + 2(y-1)^2$$
$$\text{avec les contraintes } \begin{cases} x^2 + (y+1)^2 \le 2 \\ x \ge 0, y \ge 0 \end{cases} .$$

2. (1 point) On se propose de relâcher la contrainte $x^2 + (y + 1)^2 \le 2$ au sens de la relaxation lagrangienne. Écrire la fonction de Lagrange correspondante, puis la fonction duale w et enfin le problème dual.

3. (2 points) Calculer $w(1)$ et $w(3)$. Indiquer ce qu'on peut en déduire pour le problème (P_2).